**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математический анализ

Mathematical Analysis

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 16

Регистрационный номер рабочей программы: 003572

2021

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Дисциплина «Математический анализ» входит в перечень базовых дисциплин, формирующих основную подготовку бакалавра в области математических наук, и служит основой для изучения других математических дисциплин. Целью учебных занятий является обучение методам математического анализа; развитие у обучающихся доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических и специальных дисциплин для формирования соответствующих компетенций. Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: изучение основных разделов математического анализа; развитие навыков самостоятельного решения практических задач.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины обучающиеся должны иметь предварительную подготовку в объеме курса математического анализа, изучаемого в средней школе по программе математических классов.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Планируемые результаты обучения, обеспечивающие формирование компетенции | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Общепрофессиональные компетенции | ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и  экспериментального исследования в профессиональной деятельности | • умение исследовать асимптотику и критические значения функций, владение методами интегрирования функций одной и нескольких переменных, владение основными методами теории функций комплексной переменной и гармонического анализа в соответствии с программой учебной дисциплины. | ОПК-1.1 Уметь идентифицировать возможные проблемы и пути их решения |

Обучающиеся, завершившие изучение дисциплины Математический анализ, приобретают следующие умения:

Дисциплина участвует в формировании компетенций обучающихся по образовательной программе, установленных учебным планом для данной дисциплины:

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Аудиторная учебная работа: лекции в объеме 2-4 часа + 2-4 часа практических занятий в неделю в зависимости от семестра.

Самостоятельная работа: a) под руководством преподавателя: нет,

б) в присутствии преподавателя: нет,

в) без участия преподавателя: индивидуальная работа с доступными математическими текстами, а также удовлетворение личных познавательных потребностей.

В данном курсе, как правило, применяются классические аудиторные методы. Наряду с этим в рамках самостоятельной работы предусматривается внеаудиторное освоение материала с использованием учебников и учебных пособий, а также текста некоторых разделов курса, представляемого лектором.

Объем активных и интерактивных форм учебных занятий – 100 ак. ч.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 48 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 5 |  |  |  | 98 |  | 54 |  | 50 | 7 |
|  | 2-45 |  | 2-25 | 2-25 |  |  |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 2 | 45 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 4 |  |  |  | 52 |  | 32 |  | 30 | 5 |
|  | 2-45 |  | 2-25 | 2-25 |  |  |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 3 | 45 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 4 |  |  |  | 40 |  | 23 |  | 20 | 4 |
|  | 2-45 |  | 2-25 | 2-25 |  |  |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 138 |  | 6 | 120 |  |  |  |  | 13 |  |  |  | 190 |  | 109 |  |  | 16 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 1 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 2 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 3 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Модуль 1. Введение. | Лекции | 8 ч. |
| Практические занятия | 6 ч. |
| Модуль 2. Числовые последовательности. Множества мощности континуума. | Лекции | 8 ч. |
| Практические занятия | 7 ч. |
| Модуль 3. Предел функции. | Лекции | 6 ч. |
| Практические занятия | 7 ч. |
| Модуль 4. Непрерывные функции. | Лекции | 6 ч. |
| Практические занятия | 5 ч. |
| Модуль 5. Производная и дифференциал. | Лекции | 20 ч. |
| Практические занятия | 20 ч. |
| Модуль 6. Неопределенный интеграл. | Лекции | 5 ч. |
| Практические занятия | 14 ч. |
| Модуль 7. Определенный интеграл Римана. | Лекции | 22 ч. |
| Практические занятия | 8 ч. |
| Модуль 8. Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных. | Лекции | 9 ч. |
| Практические занятия | 8 ч. |
| Модуль 9. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. | Лекции | 9 ч. |
| Практические занятия | 15 ч. |
| Модуль 10. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. | Лекции | 10 ч. |
| Практические занятия | 6 ч. |
| Модуль 11. Числовые ряды. | Лекции | 10 ч. |
| Практические занятия | 6 ч. |
| Модуль 12. Функциональные последовательности и ряды. | Лекции | 18 ч. |
| Практические занятия | 12 ч. |
| Модуль 13. Интегралы, зависящие от параметра. | Лекции | 7 ч. |
| Практические занятия | 6 ч. |

Модуль 1. Введение.

Первоначальные сведения о множествах и отображениях. Вещественные числа. Бином Ньютона. Два неравенства Коши. Ограниченные и неограниченные множества. Верхняя и нижняя грани. Теорема о существовании верхней грани. Функции. Мощность множества. Счетные множества.

Модуль 2. Числовые последовательности. Множества мощности континуума.

Предел последовательности (определение, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности). Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические действия над последовательностями, имеющими предел. Монотонные последовательности. Число е. Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Несчетность отрезка [0,1]. Множества мощности континуума. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Модуль 3. Предел функции.

Определение предела функции по Гейне и по Коши. Равносильность определений. Обобщение понятия предела функции. Свойства пределов функции. Предел монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции. Замечательные пределы (lim(sinx/x), lim(1+x)^(1/x) при x стремящемся к 0). Сравнение функций. Метод выделения главной части функции и его применение к вычислению пределов.

Модуль 4. Непрерывные функции.

Точки непрерывности и точки разрыва функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность элементарных функций. Функции непрерывные на отрезке (Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях, 1-ая и 2-ая теоремы Вейерштрасса). Понятие равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора.

Модуль 5. Производная и дифференциал.

Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Определение дифференцируемости. Дифференциал, условие дифференцируемости. Производные суммы, произведения, частного функций. Производная обратной функции. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы дифференциала. Производные основных элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема Лейбница. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя. Формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано, с остаточным членом в форме Лагранжа). Примеры разложения по формуле Тейлора. Исследование функций с помощью производных. Признак монотонности функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Асимптоты. Интерполяционный полином Лагранжа. Выпуклость и точки перегиба.

Модуль 6. Неопределенный интеграл.

Понятия первообразной и неопределенного интеграла. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Табличные интегралы. Интегрирование по частям. Замена переменной. Основные правила нахождения первообразной.

Модуль 7. Определенный интеграл Римана.

Определение интеграла. Суммы Дарбу. Условие существования интеграла Римана. Свойства интегрируемых функций. Свойства интеграла, выраженные равенствами. Свойства интеграла, выраженные неравенствами. Классы интегрируемых функций. Определенный интеграл с переменным верхним пределом (непрерывность, теорема Барроу). Формула Ньютона-Лейбница. Формула замены переменной и интегрирование по частям. Неравенства Гёльдера и Минковского. Формула Валлиса. Формула Тейлора с интегральным остаточным членом. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Геометрические приложения определенного интеграла (длина кривой, площадь поверхности вращения, площади криволинейной трапеции и криволинейного сектора, вычисление объема тела по известным площадям его поперечных сечений).

Модуль 8. Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных.

Предел функций нескольких переменных (определения, простейшие свойства). Повторные пределы. Непрерывность функций нескольких переменных (определения, арифметические действия над функциями). Непрерывность суперпозиции непрерывных функций. Свойства функций непрерывных на компакте (теоремы Вейерштрасса, Кантора). Теорема о промежуточном значении. Частные производные. Дифференцируемость. Существование частных производных у дифференцируемой функции. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

Модуль 9. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила вычисления дифференциалов. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Теорема о смешанных производных. Формула Тейлора. Экстремум функции нескольких переменных. Неявные функции (случай одного уравнения). Неявные функции, заданные системой уравнений. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Модуль 10. Интегральное исчисление функций нескольких переменных.

Криволинейный интеграл первого рода (определение, свойства). Сведение криволинейного интеграла 1-ого рода к обыкновенному. Криволинейный интеграл второго рода (определение, свойства). Сведение криволинейного интеграла 2-ого рода к обыкновенному. Случай замкнутого контура. Двойной интеграл (определение, свойства, геометрический смысл). Вычисление двойного интеграла. Формула Грина. Замена переменных в двойных интегралах. Тройной интеграл.

Модуль 11. Числовые ряды.

Определение ряда и его сходимость. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости, гармонический ряд. Арифметические действия над рядами, теорема об остатке ряда. Ряды с неотрицательными членами (необходимое и достаточное условие сходимости, теоремы сравнения). Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с неотрицательными членами. Интегральный признак сходимости. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Начальные сведения об абсолютно сходящихся рядах. Теорема о перестановки членов абсолютно сходящегося ряда. Умножение рядов. Теорема Римана. Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля сходимости ряда. Определение коэффициентов и ряда Фурье. Теорема Римана-Лебега. Частичная сумма ряда Фурье. Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации Римана. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке (условие Дини). Разложение некоторых кусочно-линейных функций в ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

Модуль 12. Функциональные последовательности и ряды.

Определение сходимости и равномерной сходимости. Сравнение. Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости. Почленный предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях и рядах. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов и последовательностей. Степенные ряды.

Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Характер сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

Модуль 13. Интегралы, зависящие от параметра.

Равномерное стремление к предельной функции. Случай собственных интегралов, зависящих от параметра (предельный переход под знаком интеграла, дифференцирование под знаком интеграла, интегрирование под знаком интеграла). Случай несобственных интегралов, зависящих от параметра (равномерная сходимость, предельный переход под знаком интеграла, интегрирование и дифференцирование интеграла по параметру). Бета и Гамма функции.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Методические материалы включают в себя следующие типы материалов — учебники, учебные пособия, методические указания для обучающихся, Интернет-ресурсы, электронные учебные пособия, с опорой на которые проводится аудиторная работа.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Методическое обеспечение самостоятельной работы  
Самостоятельная работа обучающихся, как вид деятельности, стимулирующий активность, самостоятельность, познавательный интерес с целью поиска необходимой информации, приобретения знаний, использования этих знаний для решения учебных, научных и профессиональных задач, представляет собой важную составляющую учебного процесса, которой отводится не менее половины учебного времени при очной форме обучения. Время, отводимое на самостоятельную работу, должно использоваться обучающимися для наиболее полного освоения учебной дисциплины. Следовательно, организация эффективной внеаудиторной самостоятельной работы в процессе обучения требует, с одной стороны, создание условий, призванных обеспечить рациональное и планомерное управление учебной деятельностью, протекающей в отсутствие преподавателя, и тщательной подготовки целого ряда учебных пособий, снабженных методическими указаниями, с другой стороны.  
К числу методических пособий относятся:  
• общие методические рекомендации и указания по самостоятельной работе;  
• фонд контрольных заданий и тестов для самоконтроля, которые позволяют оценить уровень знаний, навыков и умений обучающихся согласно требованиям курса, государственным стандартам и европейским компетенциям.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

**Методика проведения зачета.**

Зачет выставляется по результатам работы в семестре на зачетном занятии. Для получения отметки «зачтено» необходимо, чтобы были зачтены задачи по всем темам. На зачет отводится 2 академических часа.

При второй и третьей (с комиссией) попытках сдачи зачета обучающемуся предоставляется возможность выполнить задания по всем темам, которые не были зачтены в результате проведения текущего контроля успеваемости. Задания можно выполнять в произвольном порядке.

При сдаче зачета с комиссией работа проверяется не одним, а тремя преподавателями. Преподаватель, проводивший текущий контроль успеваемости, предоставляет комиссии все материалы по текущему контролю успеваемости обучающегося.

**Методика проведения экзамена.**

Экзамен проводится в устной форме. Билет содержит 2 вопроса из списка вопросов к экзамену. На подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа.

После ответа на основные вопросы билета преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме курса. Также в качестве дополнительного вопроса может быть предложена задача.

За ответ на экзамене выставляется оценка «не удовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Критерии выставления оценок за ответ на экзамене.

Оценка «отлично» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся даны полные исчерпывающие ответы по всем вопросам билета, обучающийся свободно ориентируется в материале;
2. обучающийся отвечает на все дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся дан полный ответ на один из вопросов билета, по второму вопросу написаны все определения, основные формулы и графики (в случае наличия);
2. обучающийся отвечает более чем на 3/4 дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполняются оба условия:

1. по обоим вопросам написаны все основные определения, формулы и графики (в случае наличия);
2. обучающийся дает правильный ответ более чем на половину заданных дополнительных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**Критерии оценки на экзамене в системе ECTS.**

Оценка «A» ставится в тех же случаях, что и оценка «отлично».

Оценка «B» ставится, если выполнены требования для оценки «хорошо» и при этом в ответе допущено не более двух неточностей.

Оценка «C» ставится, если выполнены требования для оценки «хорошо» и при этом в ответе допущено более двух неточностей.

Оценка «D» ставится, если выполнены требования для оценки «удовлетворительно» и при этом в ответе допущено не более одной грубой ошибки.

Оценка «E» ставится, если выполнены требования для оценки «удовлетворительно» и при этом в ответе допущено более одной грубой ошибки.

Оценка «F» ставится в тех же случаях, что и оценка «неудовлетворительно».

**Критерии оценки на зачете в системе ECTS.**

Оценка «A» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 90% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «B» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 80% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «C» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 70% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «D» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при этом не менее 60% заданий сделано не более чем за две попытки.

Оценка «E» ставится, если выполнены требования для оценки «зачтено» и при не более чем за две попытки сделано менее 60% заданий.

Оценка «F» ставится в тех же случаях, что и оценка «не зачтено».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный список вопросов к экзаменам по всем семестрам.

1 семестр

1. Множества и действия с ними. Формулы де Моргана для двух множеств. Декартово произведение множеств.
2. Понятие отображения, частные случаи, примеры. График отображения. Сужение и композиция отображений. Образ и прообраз множества при отображении.
3. Инъекция, сюръекция и биекция - определения и примеры. Обратное отображение. Обратимость и биективность отображения.
4. Объединение и пересечение семейства множеств. Формулы де Моргана для семейства множеств.
5. Принцип математической индукции. Бином Ньютона. Неравенство Бернулли.
6. Аксиома Архимеда. Целая часть вещественного числа. Плотность множества рациональных чисел.
7. Аксиома полноты. Теорема о стягивающихся отрезках.
8. Супремум и инфимум, их существование.
9. Счетные множества. Теорема Кантора о несчетности промежутка.
10. Предел последовательности. Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности.
11. Предельный переход в неравенстве, теорема о сжатой последовательности.
12. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.
13. Бесконечный предел. Бесконечно большие и бесконечно малые. арифметические действия над бесконечно большими.
14. Предел монотонной последовательности.
15. Число e.
16. Подпоследовательности. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.
17. Фундаментальные последовательности. Критерий Больцано-Коши.
18. Предел функции. Равносильность определений предела функции по Коши и по Гейне.
19. Единственность предела, локальная ограниченность, стабилизация знака.
20. Арифметические действия над пределами функций.
21. Предел композиции.
22. Односторонние пределы. Предел монотонной функции.
23. Критерий Больцано-Коши для функций.
24. Вычисление предела функции sin(x)/x при x стремящемся к 0.
25. Вычисление предела функции ln(1+x)/x при x стремящемся к 0.
26. Символы Ландау, их простейшие свойства, примеры. Метод выделения главной части функции и его применение к вычислению пределов.
27. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация.
28. Арифметические действия с непрерывными функциями. Композиция непрерывных функций.
29. Теоремы Вейерштрасса.
30. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
31. Теоремы о промежуточном значении и сохранении промежутка.
32. Теорема о непрерывности монотонной функции. Непрерывность обратной функции.
33. Теорема о единственности асимптотического разложения.
34. Дифференцируемость функции в точке (3 равносильных условия). Дифференцируемость и непрерывность в точке.
35. Арифметические действия над производными.
36. Дифференцирование композиции и обратной функции.
37. Производные элементарных функций.
38. Теоремы Ферма и Ролля.
39. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем.
40. Правило Лопиталя.
41. Производные и дифференциалы высших порядков.
42. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.
43. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.
44. Формулы Тейлора для элементарных функций.
45. Приближенные вычисления для чисел e и ln(2). Иррациональность числа e.
46. Монотонность и производная.
47. Локальные экстремумы. Необходимое условие локального экстремума.
48. Достаточные условия экстремума в терминах второй производной.
49. Теорема Дарбу и ее следствия.
50. Определения выпуклой и вогнутой функций. Лемма о трех хордах.
51. Существование односторонних производных у выпуклой функции.
52. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных.
53. Неравенство Йенсена. Неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим.
54. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.

2 семестр

1. Первообразная, описание множества первообразных функций на промежутке, примеры. Линейность неопределённого интеграла.
2. Замена переменной в неопределённом интеграле.
3. Интегрирование по частям. Примеры.
4. Интегрирование рациональных функций.
5. Римановы суммы, интегрируемость по Риману. Верхние и нижние суммы Дарбу.
6. Свойства сумм Дарбу.
7. Критерий интегрируемости по Риману с леммой об ограниченности.
8. Колебание функции на множестве, критерий интегрируемости на языке колебаний. Интегрируемость непрерывной функции.
9. Интегрируемость по Риману монотонной функции.
10. Интегрируемость сужения. Интегрируемость кусочно непрерывной функции.
11. Арифметические действия над интегрируемыми функциями.
12. Примеры интегрируемых и неинтегрируемых функций: функции Дирихле и Римана.
13. Аддитивность по промежутку и линейность интеграла Римана.
14. Монотонность интеграла, следствия.
15. Первая теорема о среднем, следствия.
16. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница.
17. Интегрирование по частям в определённом интеграле.
18. Замена переменной в определённом интеграле, примеры.
19. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.
20. Формула Валлиса.
21. Вторая теорема о среднем.
22. Несобственный интеграл, определение сходимости, критерий Больцано-Коши. Примеры.
23. Свойства несобственных интегралов.
24. Замена переменной в несобственном интеграле.
25. Признак сравнения сходимости несобственного интеграла.
26. Сходимость и абсолютная сходимость.
27. Признаки Абеля и Дирихле, примеры.
28. Длина кривой.
29. Интеграл и площадь подграфика. Пример.
30. Площадь в полярных координатах. Пример.
31. Неравенство Йенсена для интегралов.
32. Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского для интегралов. Неравенство для интегральных средних.
33. Предел функции нескольких переменных, эквивалентные определения, простейшие свойства.
34. Арифметические действия над пределами отображений. Предельный переход в неравенстве. Предел композиции.
35. Двойной и повторный пределы. Примеры.
36. Непрерывность отображения, эквивалентные определения. Примеры.
37. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Непрерывность композиции.
38. Теорема об образе компакта, её следствия, теорема Вейерштрасса.
39. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.
40. Дифференцируемость отображения в точке. Производный оператор, дифференциал, градиент. Единственность производного оператора.
41. Дифференцирование сложной функции.
42. Дифференцируемость и арифметические операции.
43. Дифференцирование обратного отображения.
44. Производная по вектору, производная дифференцируемой функции по вектору. Экстремальное свойство градиента.
45. Частные производные, выражение матрицы Якоби, градиента, дифференциала через частные производные. Инвариантность формы дифференциала.
46. Дифференцируемость функции с непрерывными частными производными. Примеры.
47. Определение частных производных высших порядков. примеры.
48. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков.
49. Теорема о смешанных производных.
50. Многомерная формула Тейлора-Лагранжа.
51. Экстремум функции нескольких переменных.
52. Неявные функции (случай одного уравнения).
53. Неявные функции, заданные системой уравнений.
54. Условный экстремум.
55. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
56. семестр
57. Криволинейный интеграл первого рода (определение, свойства).
58. Сведение криволинейного интеграла 1-ого рода к обыкновенному.
59. Криволинейный интеграл второго рода (определение, свойства).
60. Сведение криволинейного интеграла 2-ого рода к обыкновенному. Случай замкнутого контура.
61. Двойной интеграл (определение, свойства, геометрический смысл).
62. Вычисление двойного интеграла.
63. Формула Грина.
64. Замена переменных в двойных интегралах. Тройной интеграл.
65. Определение ряда и его сходимость. Необходимое условие сходимости ряда и критерий Больцано-Коши.
66. Гармонический ряд.
67. Арифметические действия над сходящимися рядами. Теорема о групировке членов ряда.
68. Ряды с неотрицательными членами.
69. Признак сравнения и его следствия.
70. Признаки Коши и Даламбера. Примеры.
71. Интегральный признак Коши. Вычисление асимптотики частичных сумм гармонического ряда.
72. Абсолютно сходящиеся ряды.
73. Признаки Абеля и Дирихле.
74. Признак Лейбница. Примеры применения признаков Лейбница, Дирихле и Абеля.
75. Теорема о перестановке членов ряда. Теорема Римана (формулировка).
76. Умножение рядов. Теорема Коши.
77. Теорема Римана.
78. Равномерная сходимость последовательности функций. Равносильные определения. Примеры.
79. Критерий Коши равномерной сходимости и его отрицание. Примеры.
80. Теорема о перестановке пределов. Теорема Стокса-Зайделя.
81. Теорема о почленном интегрировании.
82. Теорема о дифференцировании сходящейся последовательности функций.
83. Равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши.
84. Признак Вейерштрасса.
85. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.
86. Признак Лейбница. Примеры применения признаков Лейбница, Дирихле и Абеля.
87. Непрерывность суммы ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование.
88. Степенные ряды. Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.
89. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
90. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды.
91. Определение коэффициентов и ряда Фурье. Теорема Римана-Лебега.
92. Частичная сумма ряда Фурье. Ядро Дирихле и его свойства.
93. Принцип локализации Римана.
94. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке (условие Дини). Следствие.
95. Разложение некоторых кусочно-линейных функций в ряд Фурье.
96. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
97. Случай собственных интегралов, зависящих от параметра (предельный переход под знаком интеграла).
98. Случай собственных интегралов, зависящих от параметра (дифференцирование под знаком интеграла).
99. Случай собственных интегралов, зависящих от параметра (интегрирование под знаком интеграла).
100. Случай несобственных интегралов, зависящих от параметра (равномерная сходимость).
101. Случай несобственных интегралов, зависящих от параметра (предельный переход под знаком интеграла).
102. Случай несобственных интегралов, зависящих от параметра (интегрирование по параметру).
103. Случай несобственных интегралов, зависящих от параметра (дифференцирование интеграла по параметру).
104. Бета и Гамма функции.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции | Контрольно-измерительные материалы (КИМ) (тестовые вопросы, контрольные задания, кейсы и пр.) |
|  | 1 | 2 |
| 1 | ОПК-1.1 Уметь идентифицировать возможные проблемы и пути их решения | Ответ на каждый вопрос билетов и на дополнительные вопросы, на которые обучающийся отвечает на экзаменах трёх семестров, оценивается по шкале от 0 (нет ответа) до 10 (очень хороший ответ), далее оценка усредняется. Результат переводится в диапазон от 0 до 100. |

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций могут быть допущены преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента. Преподаватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образование и/или ученую степень, соответствующие профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

специальных требований нет

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ. MS Windows, MS Office, Mozilla FireFox, Google Chrome, Acrobat Reader DC, WinZip, Антивирус Касперского.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел или маркер для доски, губки для доски, бумага формата А4, картридж к принтеру.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список литературы**

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1-2.-М: Физматлит, 2002-2004.  
2. Кудрявцев, Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев ; Московский физико-технический институт. - М. : Юрайт, 2012 - Т. 1. - М. : Юрайт, 2012. - 703 с.

3.Демидович, Борис Павлович . Сборник задач по математическому анализу.- М: АСТ, 2005-2009.  
4. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М. 1973.  
5. Виноградов О.Л. Математический анализ: учебник. – СПб.:БХВ-Петербург, 2017.-752 с.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.

2. Додонов Н.Ю., Кальницкий В.С., Петров А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. Предел. Производная. Интеграл. СПб.: Астерион, 2021. – 50 с.

3. Додонов Н.Ю., Кальницкий В.С., Петров А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. Ряды. Функции многих переменных. СПб.: Астерион, 2021. – 88 с.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/>

Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS>

Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/>

Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource%20type=8>

**Раздел 4. Разработчики программы**

Роткевич Александр Сергеевич, доцент, к.ф.-м.-н.  
 matan@math.spbu.ru  
4284211